Matematika Ekonomi

PENGOPTIMUMAN BERKENDALA

TONI BAKHTIAR
INSTITUT PERTANIAN BOGOR

2012

Pengaruh Kendala

- Misalkan diberikan fungsi utilitas dengan 2 komoditas:

$$U(x, y) = xy + 2x.$$

- Turunan parsial U terhadap x dan y berturut-turut ialah:

$$U_x = y + 2 > 0, \quad U_y = x > 0.$$

- Turunan-turunan parsial positif menunjukkan bahwa utilitas yang tinggi diperoleh dengan mengonsumsi lebih banyak barang (tidak ada utilitas maksimum).
- Apa yang terjadi jika ada kendala anggaran (*budget constraint*)?

$$4x + 2y = 60.$$

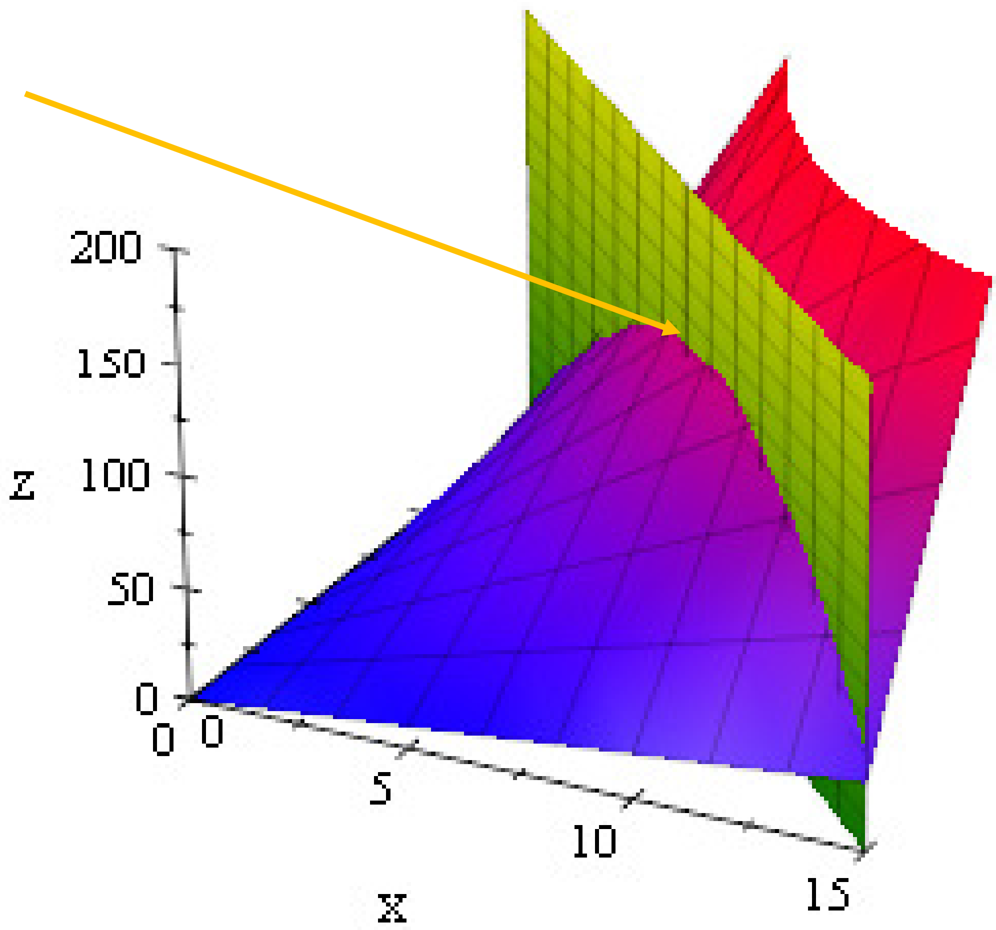
Pengaruh Kendala

- Dari kendala diperoleh: $y = 30 - 2x$.
- Substitusikan ke dalam fungsi utilitas diperoleh:

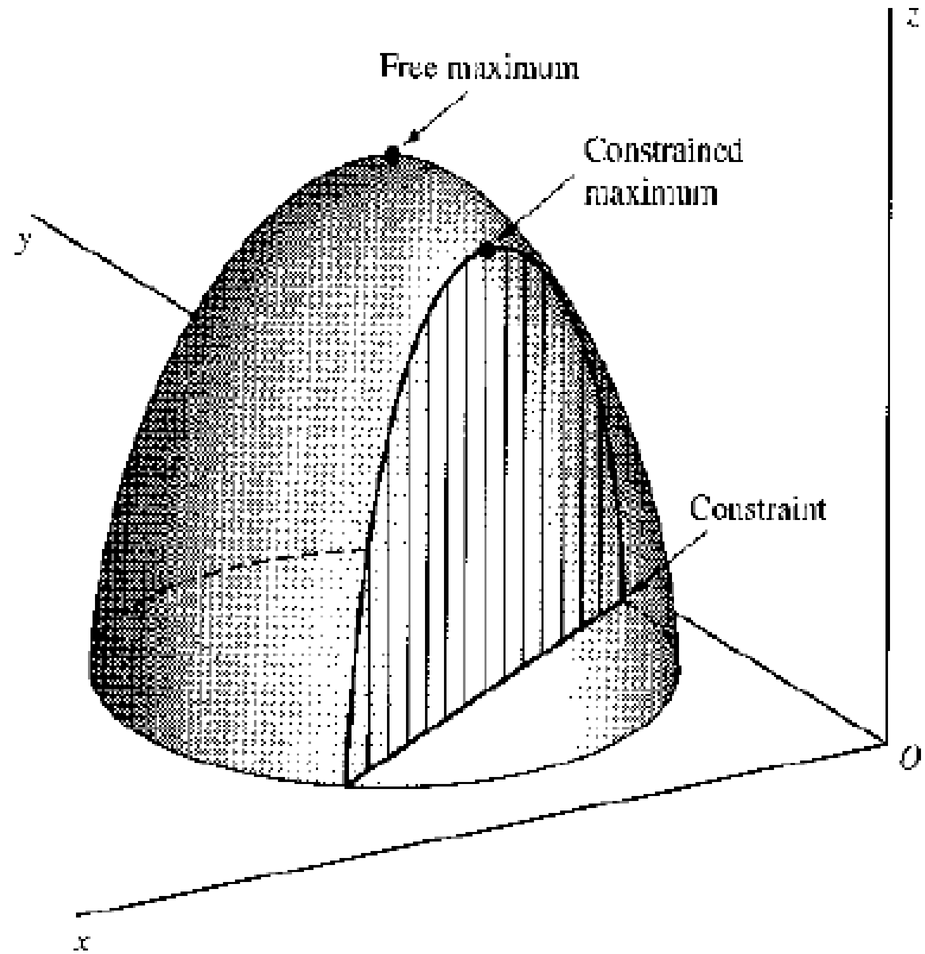
$$U(x) = x(30 - 2x) + 2x = 32x - 2x^2.$$

- Fungsi utilitas berubah menjadi fungsi variabel tunggal sehingga pengoptimumannya dapat dilakukan dengan cara biasa.
- Diperoleh titik stasioner: $x = 8$.
- Karena $U''(x) = -4 < 0$ maka $x^* = 8$ dan $y^* = 14$ memaksimumkan utilitas (berkendala).
- Diperoleh $z^* = 128$.

Pengaruh Kendala



Pengaruh Kendala



Metode Lagrange

- Masalah pengoptimuman:

$$\begin{array}{ll} \max/\min & z := f(x, y) \\ \text{s.t.} & g(x, y) = 0 \end{array}$$

- Definisikan fungsi Lagrange:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

- Syarat orde-1:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

- Parameter λ disebut sebagai pengganda Lagrange (*Lagrange multiplier*).

Metode Lagrange

- Dari contoh sebelumnya diperoleh fungsi Lagrange:

$$F(x, y, \lambda) = (xy + 2x) + \lambda(4x + 2y - 60).$$

- Syarat orde-1:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow y + 2 + 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow x + 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 60 = 0.$$

Dalam bentuk SPL:

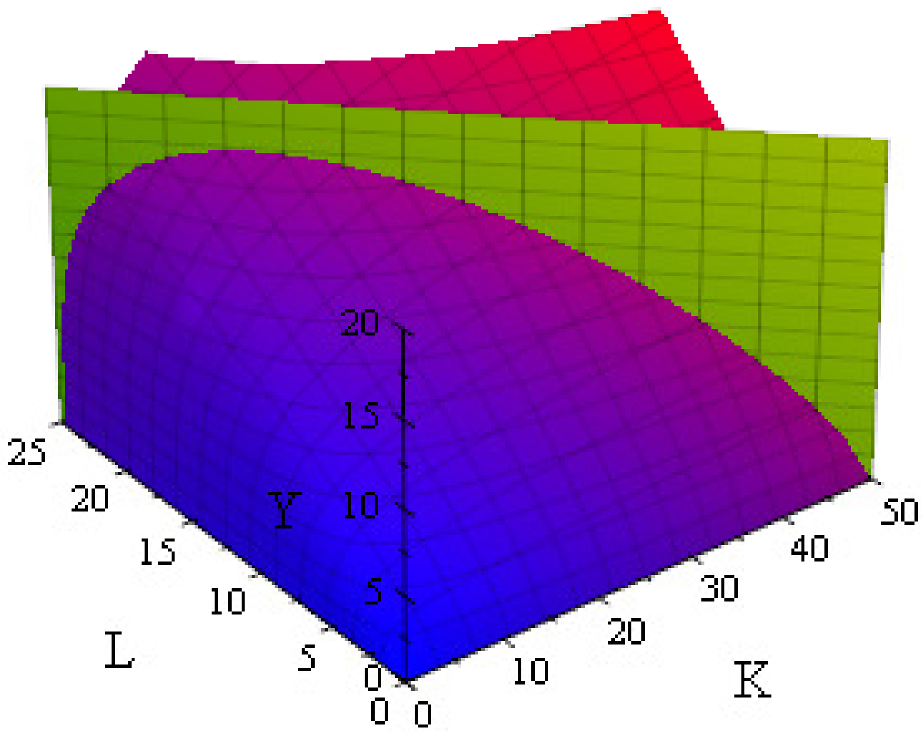
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

- Diperoleh solusi: $x = 8$, $y = 14$, $\lambda = -4$.

Terapan Ekonomi

- Masalah: max $Y = K^{0.25} L^{0.75}$

  s.t. $2K + 4L = 100.$



Terapan Ekonomi

- **Alokasi Tanah**: Seorang petani memiliki 100 ha tanah yang akan ditanami dua jenis tanaman, masing-masing seluas L_1 dan L_2. Hasil panen dijual di pasar bersaing dan masing-masing memberikan *net-profit* sebesar \$10/unit dan \$8/unit. Tentukan alokasi tanah yang memaksimumkan keuntungan jika fungsi produksi diberikan oleh:

$$Y_1 = L_1^{0.6}, \quad Y_2 = L_2^{0.8}.$$

- Masalah:

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi = 10Y_1 + 8Y_2 \\ \text{s.t.} \quad & L_1 + L_2 = 100. \end{aligned}$$

Terapan Ekonomi

- **Alokasi Waktu:** Seorang mahasiswa memiliki waktu belajar 60 jam/minggu untuk dua mata kuliah. Dia ingin menggunakan waktu belajar tersebut sedemikian sehingga nilai rata-rata kedua mata kuliah tersebut mencapai maksimum.
- Misalkan nilai yang diharapkan berdasarkan lamanya belajar diberikan oleh:

$$n_1(t_1) = 20 + 20\sqrt{t_1}, \quad n_2(t_2) = -80 + 3t_2.$$

- Masalah

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \frac{n_1(t_1) + n_2(t_2)}{2} \\ \text{s.t.} \quad & t_1 + t_2 = 60. \end{aligned}$$

Syarat Orde-2

- Masalah: max/min $z = f(x,y)$ s.t. $g(x,y) = 0$.
- Fungsi Lagrange: $L = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.
- Definisikan matriks Hess berbatas (*bordered Hessian matrix*):

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}.$$

- **Teorema**:

(x^*, y^*) solusi maksimum jika dan hanya jika $\det(\bar{H}) > 0$.

(x^*, y^*) solusi minimum jika dan hanya jika $\det(\bar{H}) < 0$.